

① TEOREMA DE VARIGNON

El torque τ debemos decir que es igual a una fuerza \times brazo de palanca; decir que el torque de una fuerza es el producto de una fuerza, por una distancia, $[N \cdot m]$

$$\tau = \vec{r} \times \vec{F}$$

Si consideramos el caso de varias fuerzas concurrentes, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 \dots$ que tienen como punto de aplicación el punto A. El Torque de cada fuerza \vec{F}_i con respecto a O es,

$$\vec{\tau}_i = \vec{r} \times \vec{F}_i$$

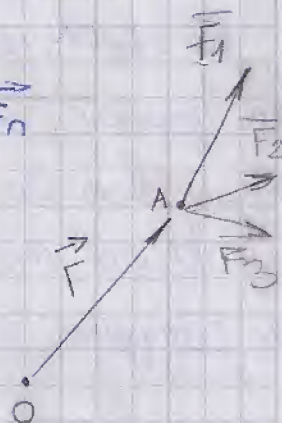
El vector posición \vec{r} sera el mismo, pues son todos concurrentes.

El $\tau_R = \vec{r} \times \vec{R}$ donde $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$

$$\vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n)$$

$$\vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \vec{r} \times \vec{F}_3 + \dots + \vec{r} \times \vec{F}_n$$

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \dots + \vec{\tau}_n = \sum \vec{\tau}_i}$$



"El torque de la resultante es igual a la suma vectorial de los torques de las fuerzas componentes si estas son concurrentes."

② CAIDA LIBRE

Se dice que un cuerpo está en caída libre solamente cuando cae en el vacío. Sin embargo, en algunos casos se puede considerar que las ecuaciones de caída libre son

válidas, esto es así cuando la fuerza de sustentación del fluido es despreciable.

En un movimiento uniformemente variado, son válidas todas las expresiones del MRUV, con la salvedad de que la aceleración será igual a " g ".

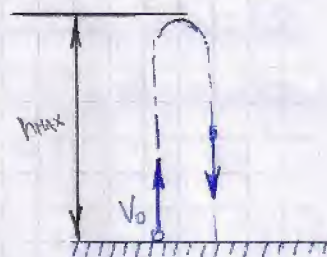
$$V_i = 0$$

$$V_f = \sqrt{2gh}$$

$$a = g$$

③ TIRO VERTICAL

El tiro vertical como se muestra en la figura, durante el ascenso el movimiento es desacelerado hasta alcanzar su altura máxima, en donde $V = 0$; posteriormente se comporta como caída libre (mov. acelerado).



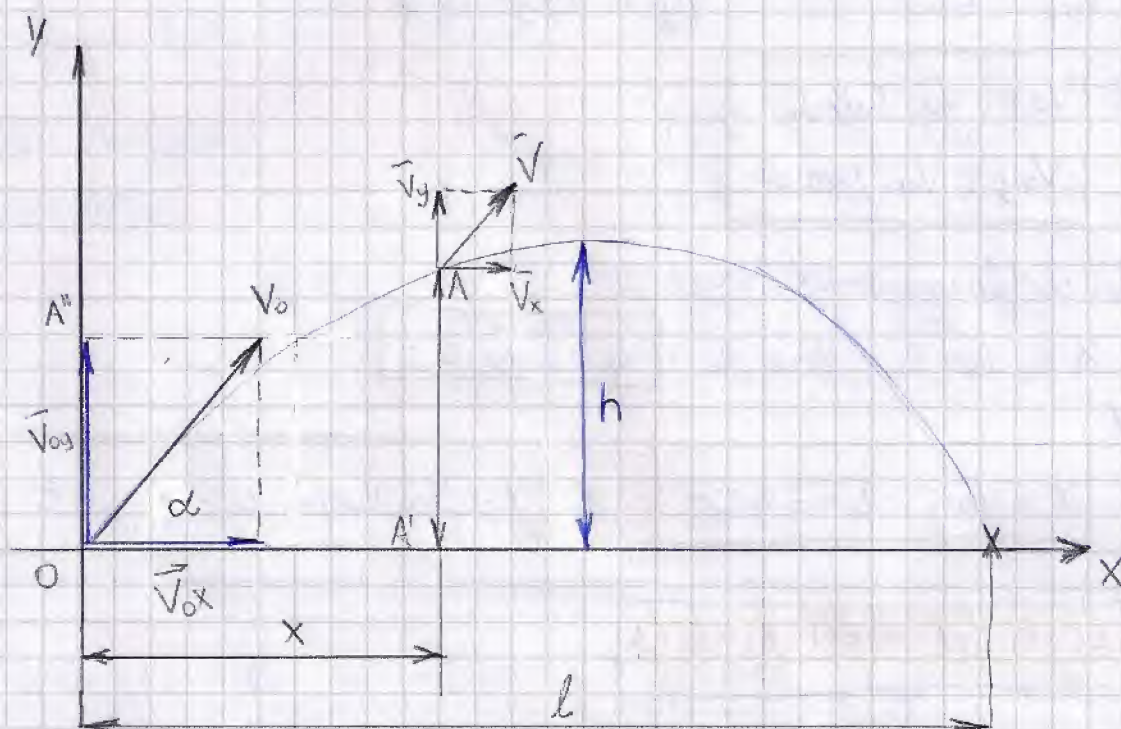
$$V = V_0 - g \cdot t$$

$$Y = V_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$a = -g$$

4 TIRO OBLICUO

Prescindiendo de las resistencias, el movimiento de un proyectil puede considerarse como la superposición de dos movimientos, proyectados cada uno sobre ejes ortogonales.



Un proyectil disparado desde O, su V_0 es inicial y se da el ángulo de tiro, "l" el alcance y h la altura máxima o flecha.

Actuara una fuerza de forma cte, el peso del proyectil ($P = m \cdot g$), con signo negativo, segun nuestro sist. de referenciar. Se realizará el analisis en base a los ejes ortogonales.

Las fuerzas que actuan:

$$\Sigma F_x = m \cdot a_x = 0 \quad \Sigma F_y = m \cdot a_y = -m \cdot g$$

Sob. O-X, no existe fuerza que se oponga. En O-Y si existe una fuerza que se oponga (el peso).

Las aceleraciones en A. serón:

$$a_x = 0 \quad a_y = -g$$

Sob. O-X el movimiento tendrá una velocidad cte. (MRU)
En cambio sob. el movimiento en O-Y será un mov. rect. Uniformemente Retardado. (MRUV)

$$V_x = V_{0x} = cte$$

$$V_y = V_{0y} - g \cdot t$$

Siendo

$$V_{0x} = V_0 \cdot \cos \alpha$$

$$V_{0y} = V_0 \cdot \sin \alpha$$

En X el desplazamiento será

$$X = V_x \cdot t = V_{0x} \cdot t = V_0 \cdot \cos \alpha \cdot t$$

y en Y.

$$Y = V_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

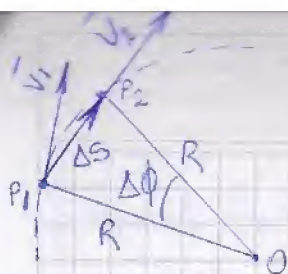
$$\text{ó } Y = V_0 \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

⑤ ACCELERACIÓN CENTRÍPETA

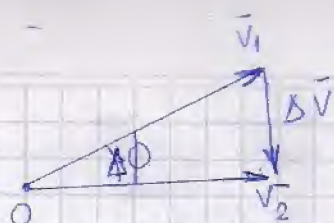
Cuando una partícula se mueve en una trayectoria curva, la dirección de su velocidad cambia. Esto implica que debe existir una componente de aceleración perpendicular a la trayectoria, incluso con rapidez constante.

MCU → Rapidez cte; no hay componente de aceleración paralela, si la hubiera la rapidez cambiaría. El vector de aél. es perp. a la normal de la trayectoria; se dirige hacia el centro; esto produce el cambio de dirección de la velocidad, sin cambiar la rapidez.

CENTRÍPETA ("BUSCA EL CENTRO", en GRIEGO)



Cambio en
trayectoria



Cambio en la velocidad.

$\Delta\phi$ son iguales por
que V_1 y V_2 son
perpendiculares

son triángulos
semoventes

$$\frac{|\Delta\vec{V}|}{V_1} = \frac{\Delta S}{R} \quad \text{o} \quad |\Delta\vec{V}| = \frac{V_1}{R} \Delta S$$

$$a_{\text{med}} = \frac{|\Delta\vec{V}|}{\Delta t} = \frac{V_1}{R} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

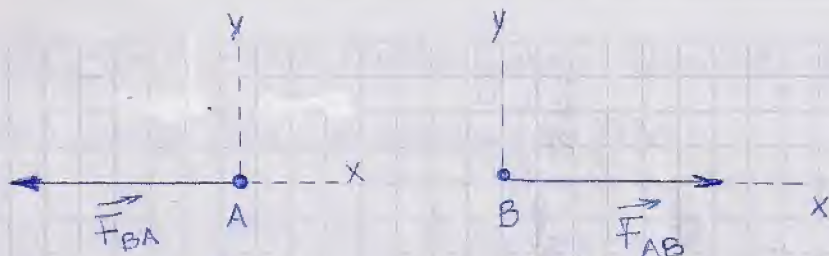
$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V_1}{R} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{V_1}{R} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

$$a_{\text{rad}} = \frac{V^2}{R}$$

$a_{\text{centrípeta}}$ cte en MCU y variable en el MCUV

6) CONSERV. CANT. MOV. LINEAL

Consideremos un sistema idealizado de dos cuerpos que interactúan entre sí. Sin la presencia de fuerzas externas, es un sistema aislado. El sistema consta de dos partículas, cada partícula ejerce una fuerza sobre la otra, según la tercera ley de Newton, las dos fuerzas son opuestas en dirección pero iguales en magnitud, sus impulsos son iguales y opuestos, y los cambios de momento lineal de las dos partículas serán iguales y opuestos.



En A es \vec{F}_{BA} y en B es \vec{F}_{AB}

POR CONCEPTO DE FUERZA

$$\vec{F}_{BA} = \frac{d\vec{p}_A}{dt}$$

$$\vec{F}_{AB} = \frac{d\vec{p}_B}{dt}$$

Los ML de cada partícula cambia, pero están relacionados entre sí por la tercera ley de Newton

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$$

$$\vec{F}_{BA} + \vec{F}_{AB} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{AB} = \frac{d\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\vec{p}_B}{dt} = \frac{d(\vec{p}_A + \vec{p}_B)}{dt} = 0$$

Las razones de cambio de los ML son iguales el \vec{P} total sera la misma

$$\vec{P} = \vec{p}_A + \vec{p}_B$$

$$\vec{F}_{BA} + \vec{F}_{AB} = \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

La razón de cambio del momento lineal total \vec{P} es cero el momento lineal es cte. (aunque los de las partículas pueden cambiar)

Si hubiese fuerzas externas se incluyen del lado izquierdo de la ecuación.

$$\vec{P} = \vec{p}_A + \vec{p}_B + \dots + \vec{p}_N \dots = m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B + m_C \vec{v}_C \dots + m_N \vec{v}_N$$

fuerza de fricción, es una fuerza de contacto.
 Existe la fricción cinética y la fricción estática.

Para mover un cuerpo sobre el suelo (por ejemplo) debe aplicarse una cierta fuerza mínima para que este se mueva, luego de iniciado el movimiento necesitaré menor fuerza para mantenerlo.

La dirección de la fuerza de fricción es siempre opuesta al movimiento.

Cuando ya el cuerpo desliza actúa una fuerza de fricción cinética. \vec{f}_k .

Es proporcional a N ; si aumenta la normal, lo hará la fuerza de roce.

$$\vec{f}_r = \mu \cdot N$$

$$\vec{f}_{rc} = \mu_k \cdot N$$

μ y μ_k son los coeficientes de fricción (Estático y dinámico)

Si aplico fuerza y NO se mueve; la fuerza de fricción es igual y opuesta a la que aplico; Este se llama fuerza de fricción estática. \vec{f}_r .

FRICCIÓN RODAMIENTO

Se puede definir un coef. de fricción de rodamiento μ_r .

es la fuerza horizontal necesaria para lograr rapidez constante en una superficie plana, dividida entre la fuerza normal hacia arriba ejercida por la superficie.

$\mu_r \rightarrow$ Resistencia a la tracción. (valor de 0,002 a 0,003 para ruedas de acero y de 0,01 a 0,02 para ruedas de caucho sobre concreto).

⑧ TRABAJO DE LA FUERZA PESO

⑨ TRABAJO DE UNA CUPLA

En el caso de que consideremos que en el punto "A" del cuerpo d , actúa una fuerza \vec{F} perpendicular al radio R , la cual hace que dicho punto rote alrededor del eje que pasa por O un ángulo θ .

El trabajo será:

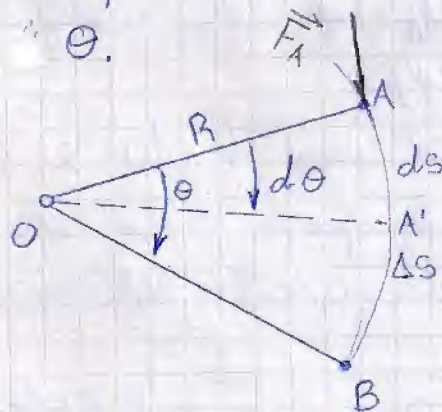
$$dW = F \cdot ds$$

$$ds = R \cdot d\theta$$

$$dW = F \cdot R \cdot d\theta$$

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} F \cdot R \cdot d\theta$$

$$W_r = \tau \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \tau \theta$$



$$\tau = F \cdot R$$

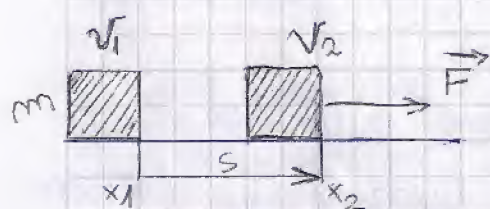
"El trabajo es igual a la cupla por el ángulo rotado en radianes."

10

FOLIO N° 5

ENERGÍA CIN TRASLACIÓN

Si una partícula se desplaza, se acelera si $W_{TOT} > 0$,
se frena si $W_{TOT} < 0$ y se mantiene si $W_{TOT} = 0$.



partícula de masa m , se desplaza
sobre el eje x , se le aplica una fuerza
en dirección a $+x$

por 2da Ley de N $F = m \cdot a_x$

v_1 cambia a v_2

$$S = x_2 - x_1$$

Substituyendo

$$v_2^2 = v_1^2 + 2 a_x \cdot S$$

(multiplicar por m
y subst. a $m \cdot a_x$)

$$a_x = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2S}$$

$$F = m \cdot a_x = m \frac{v_2^2 - v_1^2}{2S}$$

$$W_{TOT} = K_2 - K_1$$

$$\leftarrow F \cdot S = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$W_{TOT} = \Delta K$$

TRABAJO
efectuado
por F .

W_{TOT} : trabajo total efectuado
por todas las fuerzas que
actúan sobre la partícula.

$$K = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \quad [J = N \cdot m]$$

Es escalar y depende de la masa y velocidad de la
partícula.

$E_C \rightarrow$ NUNCA NEGATIVA, CERO CUANDO ESTÁ EN REPOSO.

11) ENERGÍA POT. GRA

La energía asociada con la posición se llama energía potencial. (Posibilidad de que la fuerza gravitacional realice trabajo sobre ella, pero solo si se deja caer).

Un cuerpo de masa m que se mueve a lo largo del eje "y" como en la figura. Las fuerzas que actúan sobre él son su peso, de magnitud $w = m \cdot g$ y tal vez otros (\vec{F}_{otras}).

Se quiere determinar el trabajo efectuado por el peso cuando el cuerpo cae de y_1 a y_2 . El peso y desplazamiento tienen la misma dirección, W_{GRAV} es positivo.

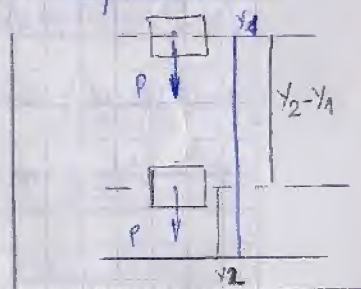
$$W_{\text{GRAV}} = F \cdot s = W(y_1 - y_2) = m \cdot g \cdot y_1 - m \cdot g \cdot y_2$$

Cuando sube ($y_1 - y_2$) es negativo W_{GRAV}

Se obtiene de lo anterior
$$U_{\text{GRAV}} = m \cdot g \cdot y$$

$$W_{\text{GRAV}} = -\Delta U_{\text{GRAV}}$$

$$W_{\text{GRAV}} = U_{\text{GRAV}1} - U_{\text{GRAV}2} = -(U_{\text{GRAV}2} - U_{\text{GRAV}1}) = -\Delta U_{\text{GRAV}}$$

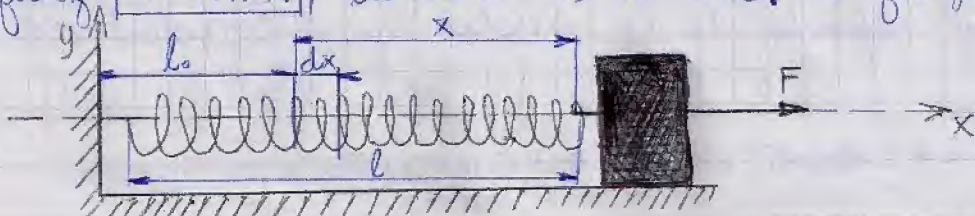


$-\Delta U_{\text{GRAV}}$

12) ENERGÍA POT. ELÁSTICA

El proceso de almacenamiento de energía en un cuerpo deformable, se lo describe en términos de energía pot. elástica.

Para estirar el resorte una distancia x , debemos aplicar una fuerza $F = k \cdot x$, donde k es la cte. de fuerza del resorte.



se procede igual que con Ep Gf. Comenzamos con el trabajo realizado por la fuerza elástica y lo combinamos con el teorema de T y E

Epe \rightarrow solo se almacena en el resorte

F debe coincidir con el flg^{el} del resorte (transitorio)
Considerando un dx , el ut. sera.

$$W = \int_{x_0}^{x_1} F \cdot dx = \int_{x_0}^{x_1} K \cdot x \cdot dx = K \int_{x_0}^{x_1} x \cdot dx$$

con $x_0 = 0$; $x_1 = x$

$$\int_0^x x \cdot dx = \frac{1}{2} x^2$$

$$W = \frac{1}{2} K x^2$$

\rightarrow se transforma
en Ep. acum. por
el x

$$E_{pe} = \frac{1}{2} K x^2$$

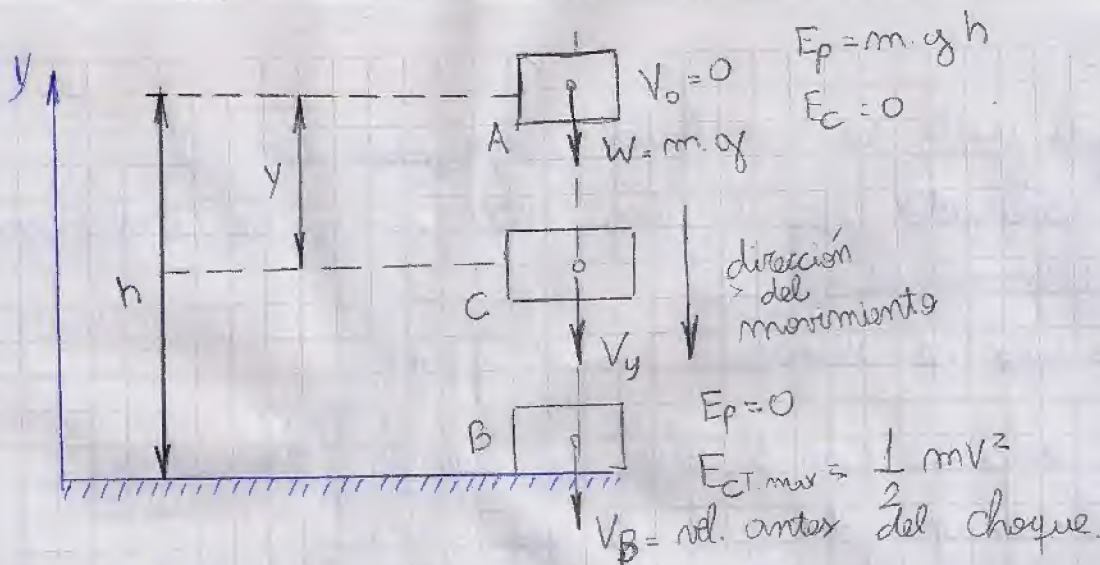
13 TRANSF. DE LA ENERGÍA

La energía mecánica de un sistema aislado es cte.

Un sistema es aislado cuando no hay influencias de fuerzas externas, ni rozamientos, choques, etc.

PRIO CONSERVACIÓN

- \rightarrow ① La suma de energía de todo el U, es cte.
- \rightarrow ② La energía no se crea ni se destruye, se transforma.
- \rightarrow ③ al transformarse, el total permanece cte.



① partirá de A con $V_0 = 0$

$$E_{CA} = 0$$

② al caer, su vel. aumentará, ($a = g$) $E_{CB} = \frac{1}{2} m V_B^2$ $E_{PB} = 0$
un instante antes V_B ($E_{CT, \max}$)

La energía pot. se transformó completamente en E_c .
para comprobar la Conservación tomamos un punto C.

$$V_y = \sqrt{2 \cdot g \cdot y} \Rightarrow V_y^2 = 2 \cdot g \cdot y$$

$$E'_c = \frac{1}{2} m V_y^2$$

con una altura $h - y$ del plano de nivel

$$E'_p = m \cdot g (h - y)$$

si sumamos $E'_p + E'_c = m \cdot g (h - y) + \frac{1}{2} m \cdot V_y^2$

reemplazando

$$= m \cdot g h - m \cdot g y + \frac{1}{2} m \cdot 2 \cdot g \cdot y$$

$$E_T = E'_p + E'_c = m \cdot g \cdot h$$

mismo valor obtenido, prueba que la E_T o E_m es Cte siempre.

14

CHOQUE PLASTICO

Una vez producido los cuerpos quedan pegados, tienen la misma velocidad final \vec{V}_2 .

La Conserv. de ML: $m_A \cdot \vec{V}_{A1} + m_B \cdot \vec{V}_{B1} = (m_A + m_B) \vec{V}_2$

En un choque plastico la E_c final es menor que la inicial. Los cuerpos se pegan y se mueven como uno solo despues del choque

Si suponemos un cuerpo con m_A y componente X de velocidad V_{A1X} Choca inelásticamente con un cuerpo de masa m_B en reposo

$$m_A \cdot V_{A1X} = (m_A + m_B) \cdot V_{2X}$$

$$V_{2X} = \frac{m_A}{m_A + m_B} V_{A1X} \Leftrightarrow \frac{m_A}{(m_A + m_B)} V_{A1X} = V_{2X}$$

verificamos que la $E_{CF} < E_{CI}$

$$K_1 = \frac{1}{2} m_A V_{A1X}^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2} (m_A + m_B) V_{2X}^2 = \frac{1}{2} (m_A + m_B) \left(\frac{m_A}{m_A + m_B} \right)^2 V_{A1X}^2$$

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{m_A}{m_A + m_B}$$

numerador siempre menor que el denominador, lado derecho es menor siempre.

15

CHOQUE ELASTICO

Es aquel que conserva la E_c despues del choque. Ocurre cuando las fuerzas entre los cuerpos que chocan son conservativas.

Un choque elástico entre A y B

V_{A1x}
 V_{B1x}] Componentes V_{0x} de los cuerpos

V_{A2x}
 V_{B2x}] Componentes V_{fx} de los cuerpos

por conservación
de E_c

$$\frac{1}{2} m_A V_{A1x}^2 + \frac{1}{2} m_B V_{B1x}^2 = \frac{1}{2} m_A V_{A2x}^2 + \frac{1}{2} m_B V_{B2x}^2$$

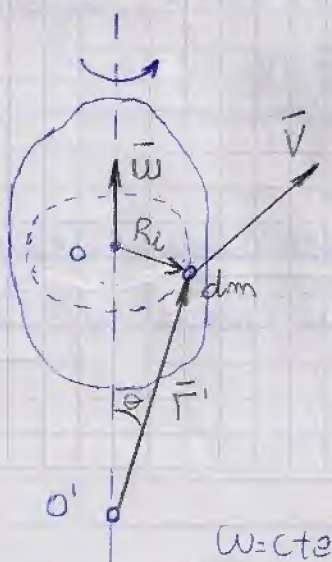
y por conservación
de M.L.

$$m_A \cdot V_{A1x} + m_B \cdot V_{B1x} = m_A V_{A2x} + m_B V_{B2x}$$

Si conocemos las masas m_A y m_B , las velocidades iniciales podremos resolver y obtener las velocidades finales.

16) ENERGÍA CINÉTICA DE ROTACIÓN

Un cuerpo rígido en rotación es una masa en movimiento, o sea que tiene energía cinética que se puede expresar en términos de la rapidez angular del cuerpo y una nueva cantidad llamada momento de inercia. (depende de la masa del cuerpo y de la forma en que se distribuye tal masa)



Consideremos una masa elemental dm ubicada a una distancia R_i finita respecto al eje de rotación.

$$dE_{c_i} = \frac{1}{2} dm V^2$$

$$dE_{cr} = \frac{1}{2} \omega^2 R_i^2 dm$$

$$E_{cr} = \frac{1}{2} \omega^2 \int R_i^2 dm \Rightarrow E_{cr} = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$$

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$V = \omega \cdot r_i \cdot \sin \theta$$

$$r_i \cdot \sin \theta = R_i$$

$$V_i = \omega \cdot R_i$$

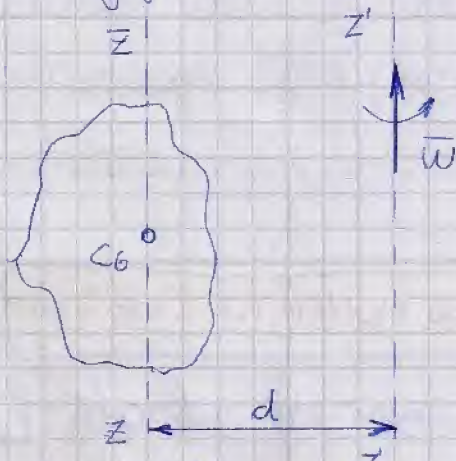
$$\omega = \text{cte}$$

17

TEOREMA DE STAINER

Cuando se trata de determinar el momento de inercia de un cuerpo que rota alrededor de un eje cualquiera, tal como se ve en la figura, se demuestra que su valor es:

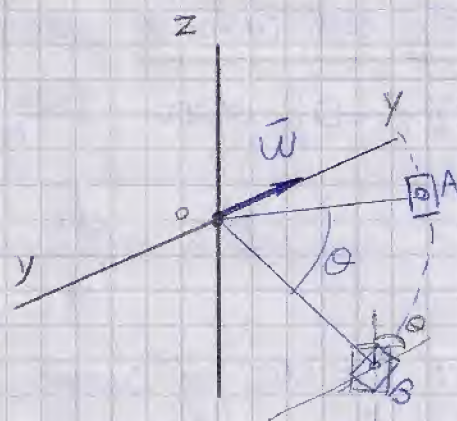
$$I = I_G + m \cdot d^2$$



I_G es el momento de inercia baricéntrico respecto al eje (z-z) que pasa por el Cg del cuerpo.

DEM:

Supongamos el movimiento de rotación alrededor del eje Y-Y. En un instante se encuentra el cuerpo en A y luego de un cierto tiempo gira un ángulo θ y pasa a B.



Esta rotación puede ser descompuesta en una traslación desde A hasta B y luego una rotación alrededor de y'-y', paralela al anterior y que pase por el CG del cuerpo describiendo en este último una rotación del mismo θ , en un t igual al empleado para ir de A hacia B.

$$E_c = E_{cr} + E_{ct}$$

$$E_{cr} = \frac{1}{2} I_G \omega^2 \quad \text{y} \quad E_{ct} = \frac{1}{2} m V^2$$

reemplazando

$$\frac{1}{2} I_{y-y} \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} I_G \omega^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 R^2$$

$$\boxed{I_y = I_G + m \cdot R^2}$$

18) TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO

En el movimiento de rotación la cantidad de movimiento angular o momento cinético se conserva si es un sist. aislado para el cual no hay cuplos externos

$(\sum \bar{\tau}_i = 0)$ o sea: POR CONCEPTO DE CUPLO

$$\sum \bar{\tau}_i = \frac{d\bar{L}}{dt} = 0 \Rightarrow L = \text{cte} \therefore \boxed{I \cdot \bar{\omega} = \text{cte.}}$$

$I \neq \text{cte.}$ en cuerpos, al modificarse la forma del cuerpo también deberá hacerlo ω para cumplir:

$$I_1 \cdot \omega_1 = I_2 \cdot \omega_2 = \dots = I_n \cdot \omega_n = \text{cte.}$$

Mediante la modificación del momento de inercia se regula la velocidad de rotación de los cuerpos.

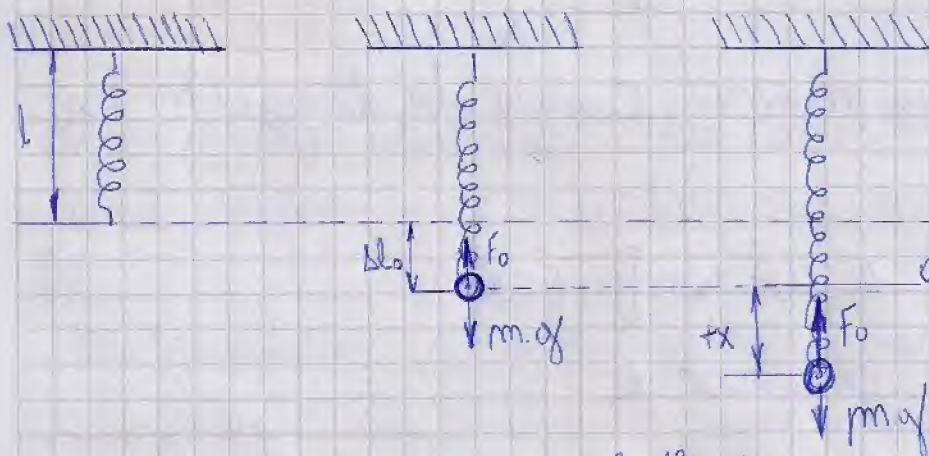
Ej: Regulador de Watt.

19) MOAS

NEW NT 9

ASCHA

Se trata de un movimiento rectilíneo en el cual la aceleración oscila entre cero y un máximo al igual que la velocidad; es armónico por que responde a las funciones seno y coseno. No se consideran las fuerzas de roce (simple).



masa susp. de un resorte, de l (long.) y K (cto.)

Si sometemos el resorte a un peso este se estirará. La elongación Δl_0 correspondiente al equilibrio entre la fuerza elástica y la gravitatoria.

$$m \cdot g = K \cdot \Delta l_0$$

aportemos la masa hacia abajo desde el origen una long. X . La F total ejercida sobre el cuerpo de masa m será:

$$F = m \cdot g - K(\Delta l_0 + X) = -K \cdot X$$

$$-K \cdot X = m \cdot a$$

$$a = \frac{d^2 X}{dt^2} = -\frac{K}{m} X$$

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{K}{m} X = 0$$

Eq. dif. de segundo orden lineal.

su solución es la función

$X = x(t)$ que representa el mov. de la masa m suspendida del resorte.

$$X = A \cdot \sin[\omega t + \varphi] \quad \xrightarrow{\text{fase inicial.}}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\text{Pulsación}} \omega^2 = K/m \text{ y } \omega = \sqrt{K/m} \\ \xrightarrow{\text{Amplitud}} \end{array}$$

$$V = \frac{dx}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos[\omega t + \varphi] \quad \text{desfasada en } \frac{\pi}{2} \text{ respecto de } X$$

"La velocidad es máxima cuando la elongación es nula".

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin[\omega t + \varphi]$$

$$a = -\omega^2 \cdot X$$

$$a_{\text{MAX}} = -\omega^2 \cdot X$$

Esta adelantada en π respecto de la función elongación

"La aceleración es máxima cuando la elongación es máxima pero de sentido opuesto".

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \cdot x = -\frac{K}{m} x$$

Periodo T ; es el intervalo de tiempo que transcurre entre dos pases sucesivos del cuerpo, en el mismo sentido, por el mismo punto X .

t es el instante de tiempo en que el cuerpo pasa por X , por $t + T$ debemos obtener el mismo valor de X , V y a .

$$\omega(t + T - t_0) + \varphi = \omega(t - t_0) + 2\pi$$

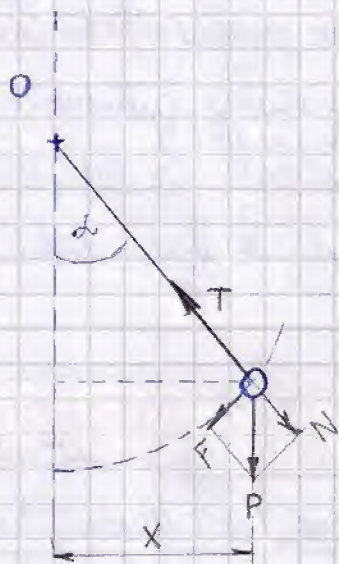
$$\begin{array}{l} \omega T = 2\pi \\ T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} \end{array} \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \text{FRECC.}$$

La f y T depende de la masa y K ; y son independientes de las condiciones generales.

(20) PENDULO SIMPLE

Es un modelo idealizado que consiste en una masa puntual suspendida de un cordón sin masa y no estirable.

Su trayectoria no es una recta, sino un arco de circunferencia de radio L (igual a la longitud del cordón).



La fuerza actuante es el peso P , que descomponemos en N y F

$$F = -P \cdot \sin \alpha = -m \cdot g \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{x}{L}$$

$$F = -m \cdot g \cdot \frac{x}{L}$$

La fuerza dada es proporcional a la elongación y de signo contrario a esta. Para ángulos pequeños es AR. SIM.

PERIODO T

$$F = m \cdot a \quad (\text{Por 2da MAS})$$

$$a = \omega^2 x$$

$$F = -m \cdot \omega^2 \cdot x$$

igualando $-m \omega^2 \cdot e = -m \cdot g \cdot \frac{x}{l}$

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

pero $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{l}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\frac{(2\pi)^2}{T^2} = \frac{g}{l}$$

$$(2\pi)^2 \cdot \frac{l}{g} = T^2$$

$$2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = T$$

Leyes del pendulo ideal.

① Oscilaciones menores a 40° son isocrónicas, el período T es independiente de la amplitud.

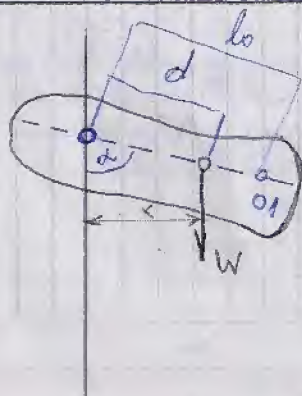
② ^{período} de osc. es independiente de la masa y de la sustancia de la esfera.

③ Los osc. permanecen en el mismo plano vertical.

④ El período es proporcional a la raíz cuadrada de la longitud e inversamente proporcional a la aceleración de la gravedad. De acuerdo a las leyes del pendulo.

21) PENDULO FÍSICO

Es todo cuerpo suspendido de un eje, alrededor del cual puede oscilar. La masa no se puede suponer concentrada en un punto.



Si G es el CG, la distancia de este al Centro de Suspensión O es " d ", y es una posición definida, forma un ángulo α con la posición de equilibrio.

Si se lo abandona en esa posición, comenzará a oscilar, con un MAS. como un péndulo isócloro.

$$\tau = -W x \quad (\text{Cuplo resp. del mov. de rotación})$$

$$\tau = I_0 \cdot \gamma$$

↳ momento I con respecto a O

$$a = \gamma \cdot d$$

$$\gamma = \frac{a}{d}$$

$$\tau = I_0 \cdot \gamma$$

$$\tau = I_0 \cdot \frac{a}{d}$$

$$-m \cdot g \cdot x = I_0 \cdot \frac{a}{d}$$

$$-m \cdot g \cdot x = I_0 \cdot \frac{a}{d}$$

$$a = \omega^2 x \quad \omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$m \cdot g \cdot x = I_0 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{x}{d}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{m \cdot g \cdot d}}$$

$$m \cdot g \cdot x = I_0 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{x}{d}$$

$$m \cdot g \cdot \cancel{x} = I_0 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{\cancel{x}}{d}$$

$$m \cdot g = I_0 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{1}{d}$$

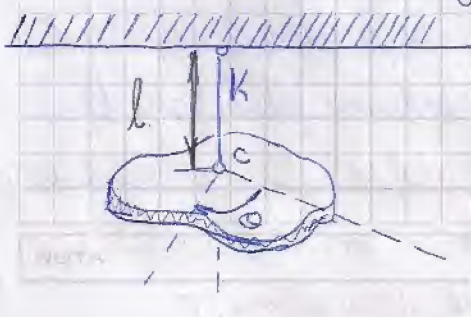
$$\frac{m \cdot g \cdot d}{I_0} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$\frac{I_0}{m \cdot g \cdot d} = \frac{T^2}{4\pi^2}$$

$$2\pi \sqrt{\frac{I_0}{m \cdot g \cdot d}}$$

22 PENDULO DE TORSIÓN

Se usa para la determinación del momento de inercia de los cuerpos complicados, ya sea en su constitución o en su forma.



Consiste en un cuerpo suspendido por un alambre o fibra, de tal manera que la línea OC pase por el centro de masa del cuerpo.

Se rota un ángulo θ a partir de la posición de equilibrio, el alambre se tuerce ejerciendo sobre el cuerpo un torque τ alrededor de OC que se opone al desplazamiento θ y de magnitud proporcional al ángulo.

$$\tau = -k\theta$$

\rightarrow Coef. de torsión del alambre

I es el momento de inercia con respecto al eje OC.

$$\tau = I \cdot \gamma = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -k\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{I} \theta = 0 \quad \text{Eq. dif.}$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{k}{I}}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{I}}}}$$

23) VELOCIDAD ORBITAL

Los planetas se mueven en órbitas elípticas de poca excentricidad. Su velocidad orbital dependerá de la distancia al centro de masa del sistema planetario.

Será la velocidad tangencial que debe darse al cuerpo de masa m para que se transforme en un satélite artificial de la Tierra si lo lanzo de una altura r .



Para orbitas próximas a la superficie.

NOMBRE N° 12

FECHA

Suponemos que el cuerpo de masa m está en reposo sobre la Tierra o próximo a ella.

$$F_1 = G \frac{m \cdot m_T}{R_T^2} = m \cdot g \quad \therefore \frac{G \cdot m_T}{R_T^2} = g \quad (1)$$

ahora si lo consideramos como un satélite, a una distancia r , la fuerza F_2 , será lo mismo que resulta por prop a la a_c , por la segunda Ley de movimiento.

$$F_2 = G \frac{m \cdot m_T}{r^2} = m \cdot a_c \quad \therefore \frac{G \cdot m_T}{r^2} = a_c \quad (2)$$

si divido miembro a miembro

$$\frac{a_c}{g} = \frac{R^2}{r^2} \quad \therefore a_c = g \frac{R^2}{r^2}$$

La a_c será la necesaria para mantenerlo en órbita y para impedir que el cuerpo salga disparado.

$$a_c = \frac{V_o^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_o^2}{r} = g \cdot \frac{R^2}{r^2}$$

$$V_o = R \sqrt{\frac{g}{r}}$$

La V_o es independiente de la masa del satélite. V_o produce la fuerza centrípeta necesaria para imprimirle al satélite un movimiento de trayectoria circular alrededor de la tierra y a mantenerse en él.

$$R = r$$

$$V_0 = \sqrt{g \cdot R}$$

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2 = 127.000 \text{ km/h}^2$$

$$R = 6370 \text{ km}$$

$$V_0 = 28400 \text{ km/h} = 8 \text{ km/s}$$

Los satélites artificiales tienen alturas variables respecto a la Tierra. V_0 disminuirá con la altura " r ", al aumentar r disminuye g .

para calcular con exactitud debemos introducir el valor de g .

$$g = \frac{G \cdot m_T}{r^2}$$

$$V_0 = R \sqrt{\frac{G \cdot m_T}{r^3}}$$

$$r = 35790 \text{ km} \quad \text{Con período } T = 24 \text{ h}$$

El satélite en esta órbita, gira a la misma velocidad angular de la Tierra, parecerá fijo en un punto. Es lo que se trata de un Satélite Geostacionario.

② VELOCIDAD DE ESCAPE

Un cuerpo de masa " m " que escapa de la atracción gravitacional de la Tierra y no regresa, lanzado desde la superficie del planeta con una velocidad inicial V_e .

Implica transformar a un cuerpo en un proyectil, expulsado de la Tierra con solo el impulso inicial que le permite adquirir la velocidad V_e pueda librarse del campo gravitacional terrestre.

Determinación

HOJA 13

Un proyect. a una distancia r del centro de la Tierra

$$F_{\text{atraz}} = G \cdot \frac{m \cdot m_T}{r^2}$$

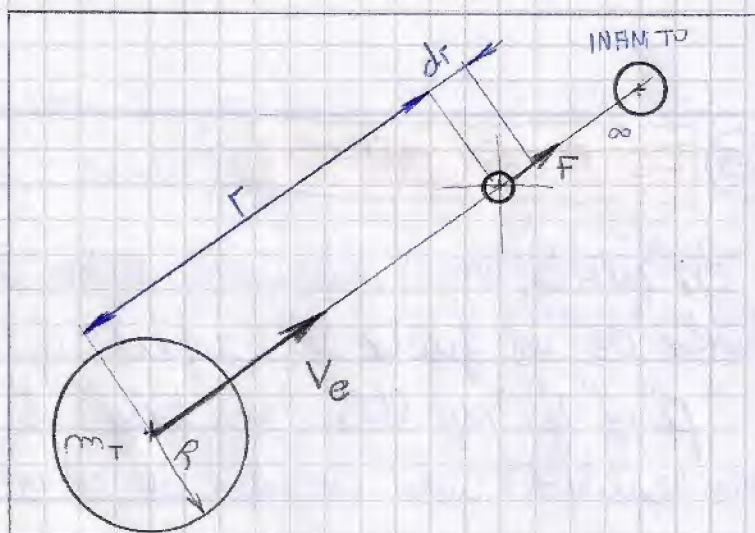
para sacar al proyectil, debe hacer un trabajo igual a

$$dW = F \cdot dr$$

$$dW = G \cdot m \cdot m_T \cdot \frac{dr}{r^2}$$

$$F = G \cdot \frac{m \cdot m_T}{R^2} = m \cdot g$$

$$G = \frac{g \cdot R^2}{m_T}$$



$$dW = - \frac{g \cdot R^2}{m_T} \cdot m \cdot m_T \cdot \frac{dr}{r^2} = -g \cdot R^2 \cdot m \cdot \frac{dr}{r^2}$$

$$W = m \cdot g \cdot R^2 \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2}$$

$$W = m \cdot g \cdot R^2 \left(\frac{1}{R} \right) \quad \therefore \quad W = m \cdot g \cdot R$$

El W debe ser igual a la E_c que adquiere el proyectil viniendo desde el infinito, al momento de llegar a la sup de la tierra, con v_e

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v_e^2$$

NOTA $W = E_c = \frac{1}{2} m \cdot v_e^2 = m \cdot g \cdot R \quad \therefore \quad \frac{1}{2} v_e^2 = g \cdot R$

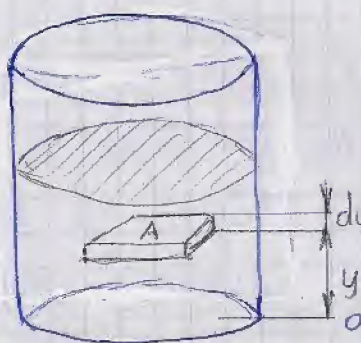
$$V_e = \sqrt{2 g R}$$

Es independiente de la masa del proyectil,

(25) EC. FUND. HIDROST.

Es posible una deducción entre la presión P en cualquier punto de un fluido en reposo y la altura " y " del punto.

" P " y " g " son ltes. en todo el fluido, si el fluido está en equilibrio, cada elemento del volumen está en equilibrio.



Se considera un elemento delgado, de altura dy , las superficies inferior y superior tienen área A , a y distancia $y + dy$ por encima del nivel 0.

$$Vol \Rightarrow dV = A dy$$

$$F = P \cdot A$$

$$masa \Rightarrow dm = \rho dV = \rho A \cdot dy$$

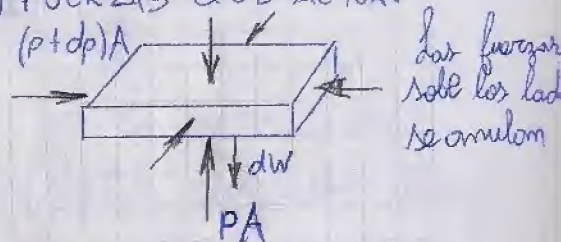
$$Peso \Rightarrow dW = dm \cdot g = \rho \cdot g \cdot A \cdot dy$$

La ρA es la componente y de la fuerza total hacia arriba que actúa sobre toda la superficie.

En la parte superior es $P + dp$ y la componente y fuerza total hacia abajo sobre la superficie es $-(P + dp)A$

$$\Sigma F_y = 0 \quad PA - (P + dp)A - \rho \cdot g \cdot A \cdot dy = 0$$

(b) FUERZAS QUE ACTÚAN



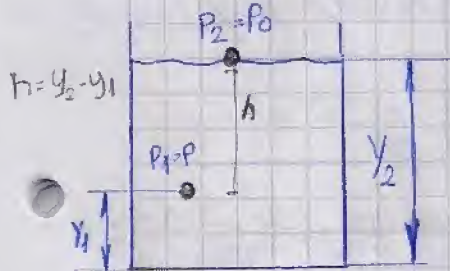
Dividiendo entre A y reordenando

$$\boxed{\frac{dp}{dy} = -\rho \cdot g}$$

$$\int_{P_1}^{P_2} dp = -\int_{y_1}^{y_2} \rho \cdot g \, dy$$

$$P_2 - P_1 = -\rho \cdot g (y_2 - y_1)$$

Esta expresión nos indica que si "y" aumenta, P disminuye.



P_1 y P_2 son las presiones a las alturas y_1 e y_2 . siendo " ρ " y " g " constantes

$$P_2 - P_1 = -\rho \cdot g (y_2 - y_1) \quad (\text{presión en un fluido de densidad uniforme})$$

$$P_2 = P_0$$

$$P_1 = P$$

$$P_0 - P = -\rho \cdot g (y_2 - y_1) = -\rho \cdot g \cdot h$$

$$\boxed{P = P_0 + \rho \cdot g \cdot h}$$

26) PRINCIPIO DE PASCAL

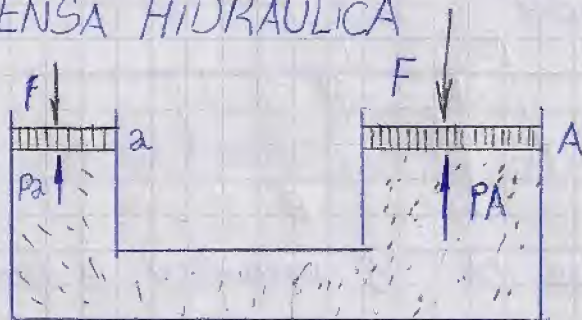
"La presión aplicada a un fluido encerrado se transmite sin disminución a todos los puntos del fluido."

$$\boxed{P_1 - P_2 = \rho \cdot g \cdot h}$$

al aumentar P_2 , P_1 deberá aumentar en la misma proporción.

La diferencia de presión entre dos puntos, depende de la distancia h que los separa y del peso específico del fluido.

La principal aplicación de la Ley de Pascal es la PRENSA HIDRAULICA



aparato que consiste en un recipiente lleno de un líquido (aceite) por ejemplo

provisto de dos cilindros con émbolos pistones de seccio-
nes diferentes.

El de sección a ; tiene aplicada una fuerza f

$$p = \frac{f}{a}$$

De acuerdo a Pascal, la presión se trans-
mite en todo el recipiente a través del
líquido.

Se aplicará sobre el pistón en A , determinando F .

$$p = \frac{f}{a} = \frac{F}{A}$$

$$p = \text{cte (Pascal)}$$

$$\frac{f}{a} = \frac{F}{A} \Rightarrow \boxed{\frac{F}{f} = \frac{A}{a}}$$

$$\boxed{F = \frac{A}{a} \cdot f}$$

CAMBIO DE PRESIÓN

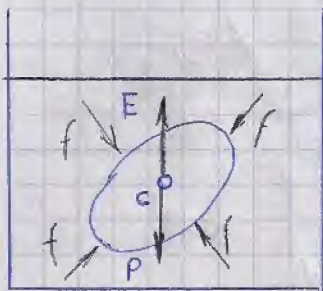
→ INCOMPRESIBLE → INSTANTANEO
→ COMPRESIBLE → VEL. SONIDO

La prensa hidráulica produce un efecto multiplicador de
la fuerza f ; el factor de multiplicación será la razón de las
secciones de ambos pistones.

27) PRINCIPIO DE ARQUIMEDES

15

"Si un cuerpo esta parcial o totalmente sumergido en un fluido, este ejerce una fuerza hacia arriba sobre el cuerpo igual al peso del fluido desplazado por el cuerpo."



En el interior del fluido aislamos una porción limitada por una sup. A.

En el Σ equilibrio la resultante R de las fuerzas f que ejerce el resto del

líquido sobre A, deberá ser igual y de signo contrario al peso ($P = mg$), de la porción de fluido considerado.

En todos los casos la resultante de las fuerzas f será una fuerza vertical dirigida hacia arriba, igual al peso del líquido que ocuparía el volumen determinado por la superficie. La resultante se denomina empuje. E

Si $E > P$ EL CUERPO ASCIENDE

Si $E < P$ EL CUERPO SE HUNDE

Si $E = P$ EL CUERPO FLOTA

28) LEY DE JURIN

Si el líquido moja las paredes del sólido, el menisco es cóncavo, si no es cóncavo.

A raíz de la capilaridad se observa un ascenso o descenso del líquido en pequeños tubos denominados Capilares.

al subir el líquido lo hace por la τ_{LV} que actúa en la circunferencia superior adherida al tubo y que genera la fuerza que proyectada se designa F_y y que se eq. con el peso de la columna líquida W .

W .

$$\rho = \frac{W}{V}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$P_e = P_{dens.} \cdot \sigma$$

$$F_y = 2\pi R \cdot \tau_{LV} \cdot \cos \theta$$

$$W = \pi R^2 h \cdot \rho \rightarrow \text{Peso específico}$$

$$F_y = W \Rightarrow 2\pi R \cdot \tau_{LV} \cdot \cos \theta = \pi R^2 h \cdot \rho$$

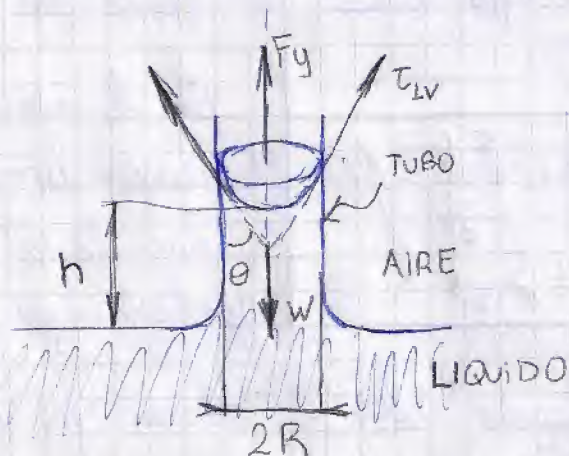
$$h = \frac{2 \cdot \tau_{LV} \cdot \cos \theta}{\rho \cdot R}$$

El signo de γ varía $+ (0^\circ \text{ a } 90^\circ)$ ~~NO~~ MOJA AL SÓLIDO
 $- (90^\circ \text{ a } 180^\circ)$ NO " " "

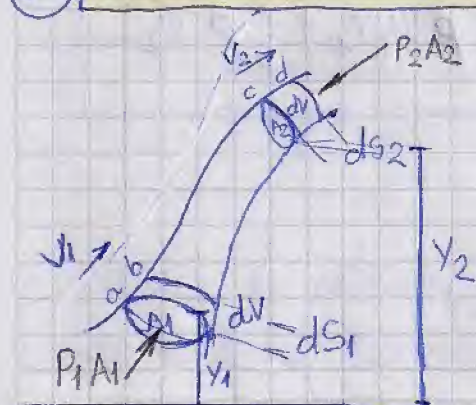
Si a la expresión la multiplico por R

$$h_R = \frac{2 \tau_{LV} \cdot \cos \theta}{\rho} = a^2$$

$$a^2 = h \cdot R \quad \text{cte. de Capilaridad.}$$



29) TEOREMA DE BERNOULLI



Relaciona la presión 16
la rapidez del flujo y la altura para
el flujo de un fluido ideal

Para deducir la ecuación
de Bernoulli, aplicamos el
teorema del trabajo y la
energía.

Los valores de rapidez serán v_1 y v_2 , al cabo de
un dt . $a \rightarrow b$ $ds_1 = v_1 \cdot dt$
 $c \rightarrow d$ $ds_2 = v_2 \cdot dt$

El fluido por ser incompresible, su volumen $dV = A_1 ds_1 = A_2 ds_2$
es cte.

Calculamos el W efectuado durante el dt (no hay viscosidad,
las únicas fuerzas son debidas a la presión).

$$dW = P_1 \cdot A_1 ds_1 - P_2 A_2 ds_2 = (P_1 - P_2) dV$$

Se debe a fuerzas distintas de la fuerza de gravedad,
así que el dW es igual a la EM

La EM no cambia en todo el sistema

$$dK = \frac{1}{2} \rho \cdot dV (v_2^2 - v_1^2) \quad dU = \rho \cdot dV \cdot g (y_2 - y_1)$$

Si combinamos

$$(P_1 - P_2) dV = \frac{1}{2} \rho \cdot dV (v_2^2 - v_1^2) + \rho \cdot dV \cdot g (y_2 - y_1)$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) + \rho \cdot g (y_2 - y_1)$$

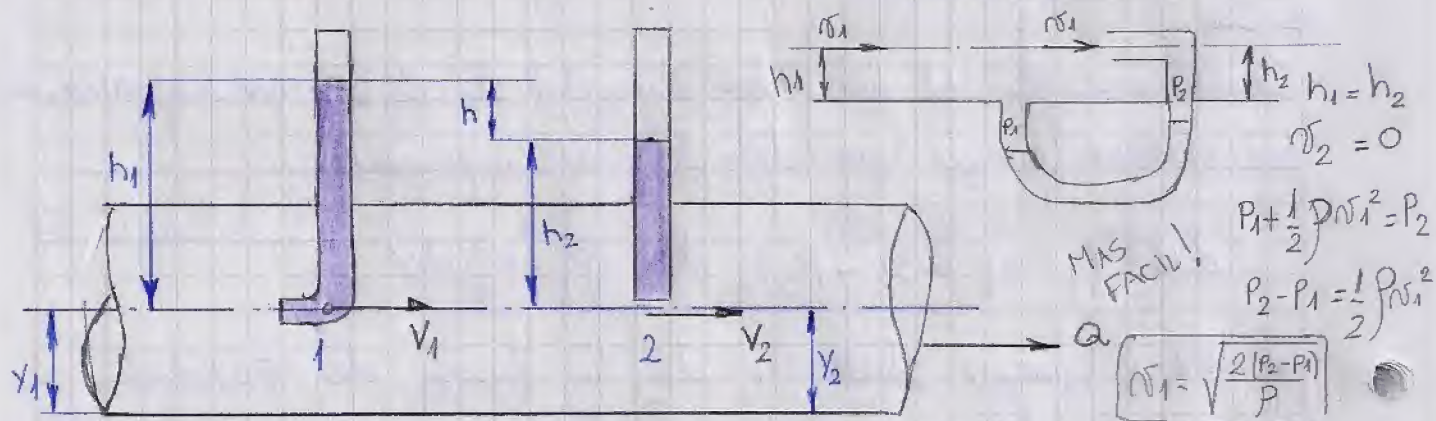
de forma mas práctica:

$$P_1 + \rho \cdot g \cdot Y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho \cdot g \cdot Y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

30 TUBO PITOT

Es un manómetro que permite medir la velocidad de un fluido por diferencia entre la presión hidrostática e hidrodinámica de los tubos.

$$Y_1 = Y_2 = Y$$



Cuando se produce el eq. hidrostático de la columna y el hidrodinámico del líquido, la velocidad de S_1 es 0; en cambio la misma cond. en la S_2 ser V_2 .

Ap. BERNOULLI

$$\frac{1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2\rho g} + Y_1 = \frac{P_2}{\rho \cdot g} + \frac{V_2^2}{2\rho g} + Y_2$$

$$\frac{1}{\rho} - \frac{P_2}{\rho \cdot g} = \frac{V_2^2}{2\rho g} \quad \therefore \quad P_1 - P_2 = \frac{\rho \cdot V_2^2}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} P_1 = \rho \cdot g \cdot h_1 \\ P_2 = \rho \cdot g \cdot h_2 \end{array} \right\} \therefore \rho \cdot g (h_1 - h_2) = \frac{\rho \cdot V_2^2}{2}$$

$$P_1 - h_2 = h$$

$$P \cdot g \cdot h = \frac{P \cdot V^2}{2}$$

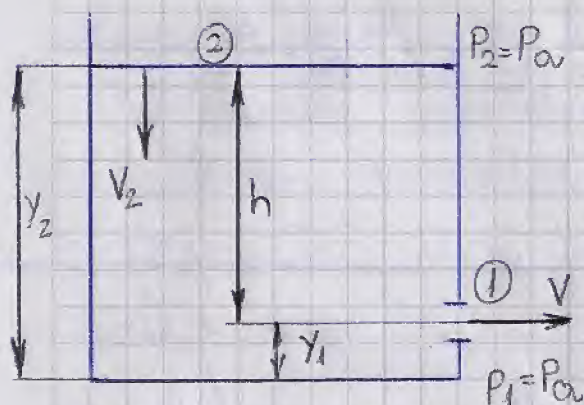
$$V = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Conocida la velocidad y la sección de la tubería puede calcularse el caudal que escurre.

31) TEOREMA DE TORRICELLI

"La velocidad de salida de un fluido por un orificio pequeño y en pared delgada es igual a la velocidad que adquiriría un cuerpo cayendo en el vacío desde la altura h ."

SG = Secc Grande.
Sp = Secc. Peq.



$$P_1 = P_2 = P_a$$

$$V_2 \cong 0$$

Se considera un recipiente de pared delgada, de ϕ grande (SG) y un orificio en la pared (Sp), se

llena de agua hasta y_2 que se mantendrá, que se mantendrá ingresa igual Q por (2) que el que sale por (1) a y_1

La sección de salida es pequeña, el líquido desenderá lentamente, $V_2 \cong 0$. Si aplicamos Ber a (1) y (2)

$$\cancel{P_2} + \cancel{\frac{1}{2} \rho V_2^2} + P \cdot g y_2 = \cancel{P_1} + \frac{1}{2} \rho \cdot \sigma V_1^2 + P \cdot g y_1$$

$$P \cdot g y_2 - P \cdot g y_1 = \frac{1}{2} \rho \cdot \sigma V_1^2$$

$$V_1^2 = 2g(y_2 - y_1) = 2gh$$

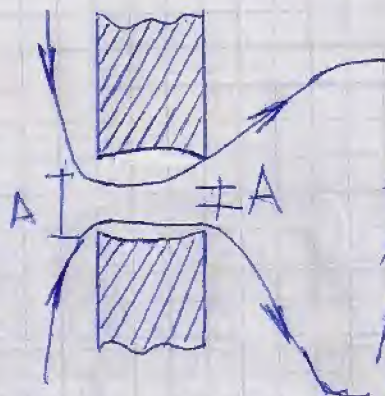
$$V_1 = \sqrt{2gh}$$

$$\rho \cdot g (y_2 - y_1) = \frac{1}{2} \rho V_1^2$$

$$\sqrt{2gh} = V_1$$

El vector \vec{V}_1 es normal a la sección del orificio, nos sirve para calcular su caudal

$$Q = A \cdot V = A \sqrt{2gh}$$



El escarriamiento a través del orificio se produce la convergencia de los filamentos líquidos y se despegan de la sección produciendo una restricción, se reduce la sección real, depende de la forma del orificio. En caso de circular $K = 0,65$,

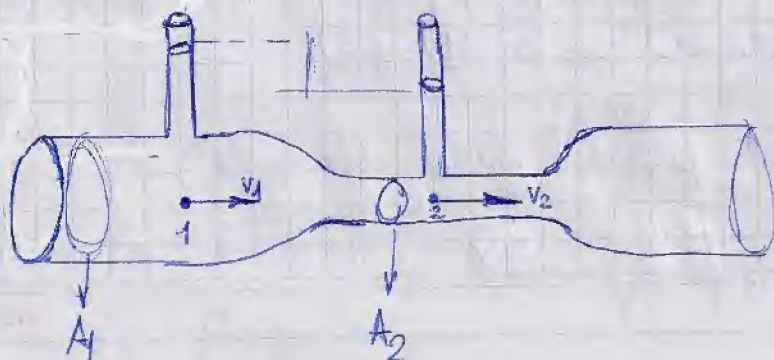
se reduce un 35%.

$$Q = K \cdot A \sqrt{2gh}$$

$$K \cdot A = A_c \quad \therefore K = \frac{A_c}{A}$$

32) TOBERA VENTURI

Se usa para medir la rapidez de flujo en un tubo. El flujo es estable y suponer que el fluido es incompresible y que tiene fricción interna despreciable.



Se aplica B. en ① y ② del tubo.

$$(y_1 = y_2)$$

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

por la ec. de Continuidad

$$P_2 = (A_1/A_2)v_1$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right)$$

$$P_1 - P_2 = \rho \cdot g \cdot h$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{(A_1/A_2)^2 - 1}}$$

33

LEYES DE DILATACIÓN DE GASES IDEALES

Elevando la temperatura de los sólidos y fluidos su volumen aumenta, en los fluidos incluimos a los gases.

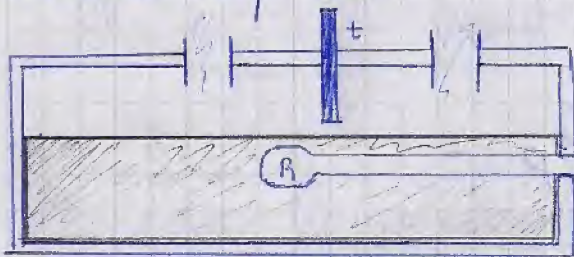
Si tenemos una masa de gas, elevando su temperatura su volumen aumentará si el recipiente que lo contiene se lo permite; si es indeformable el volumen del gas no cambia pero su presión aumenta.

Los casos con variación de temperatura se llaman dilataciones.

Si $p = \text{cte}$; variará el volumen y el fenómeno recibirá el nombre de dilatación ^o constante.

Si $V = \text{cte}$; variará la presión y el fenómeno recibirá el nombre de dilatación o volumen cte.

Dilatación a p. cte.



Para llevar a cabo la dilatación de este dispositivo. El gas se coloca en que llevo un tubo horizontal en cuyo interior corre un índice i de mercurio. El tubo está graduado, es un dilatómetro.

La posición de "i" en la escala da el volumen V del gas encerrado en R. Se coloca hielo en C, t° mercurio 0°C e "i" marca V_0 ; calentando C, se determinaron los distintos volúmenes que ocupa el gas en R. La P. del gas no variará y queda igual a la P_a .

a una T° , el volumen será V_t : $\Delta V = V_t - V_0$; el Coef. medio de dilatación del gas (0°C y $t^{\circ}\text{C}$): $\alpha = \frac{V_t - V_0}{V_0 t}$; este representa el aumento medio de volumen que experimenta cada unidad de volumen del gas por cada $^{\circ}\text{C}$ siempre a p. cte.

$$V_t = V_0(1 + \alpha t)$$

Ley de GAY LUSAC El Coef. de dilatación de un gas entre 0° y t° bajo presión cte., es indep. de la temp., de la presión y de la naturaleza del gas. TODOS LOS GASES SE DILATAN IGUALMENTE"

$$\alpha = \frac{1}{273,16} = 0,003665$$

$$[\alpha] = \frac{1}{[T]}$$

TRASF. A VOL. CTE

$V = \text{cte}$ y $P = f(t)$; En R se coloca el gas, se comunica con un manómetro de aire libre que permite medir las presiones P que corresponden a cada temperatura.

En la Caja metálica se coloca hielo, $t^{\circ} = 0^{\circ}\text{C}$ y P será P_0 .

$$P_0 = (H - h_0) p.$$

Si lo sometemos a Q, se elevará t° ; el vol. aumenta, se levanta la otra rama del manómetro E, hasta que el mercurio vuelva a N.

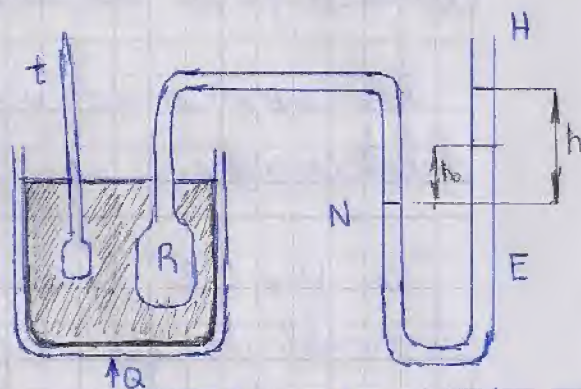
COEF. MEDIO DE AUM. DE PRESIÓN

$$P_t - P_0 = (h - h_0) p$$

$$\beta = \frac{P_t - P_0}{P_0 \cdot t} = \frac{\Delta P}{P_0 \cdot t}$$

$$P_t = P_0(1 + \beta t)$$

Representa el aumento medio de presión del gas, por cada unidad de presión inicial y por cada grado de elevación de temp. entre 0°C y $t^{\circ}\text{C}$.



34 EC. CALORIMETRÍA

19

ΔQ es la Cantidad de calor que tiene, es proporcional a la temperatura.

Después de experiencias se logra concluir que

$$\Delta Q = C \cdot \Delta t$$

\rightarrow CTE. PROP \rightarrow SALTO TERMICO.
 \rightarrow CANT. CALOR

C = Capacidad Calorífica media $C = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$

Con $\Delta t \rightarrow 0$ $C_v = \frac{dQ}{dt}$

C_v = Capacidad Calorífica verdadera del cuerpo a t° y representa con buena aproximación el calor que es necesario dar al cuerpo a t° para calentarlo en $1^{\circ}C$.

Si el cuerpo es homogéneo, la Capacidad Cal. es prop. a la masa.

$C = c \cdot m$ por lo tanto $c = \frac{C}{m}$

$c = \frac{C_v}{m}$ si el calor fuese medio.

$$C = \frac{1}{m} \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

$$\left[\frac{J}{g^{\circ}C} ; \frac{Cal}{g^{\circ}C} \right] = C$$

$$\Delta Q = m \cdot C \cdot \Delta t$$

$$\Delta Q = \int_1^2 dQ = m \int_1^2 c dt$$

35 LEYES DE REFLEXIÓN-REFRACCIÓN

① Los rayos incidente, reflejado y refractado, así como la normal a la superficie, yacen en un mismo plano.

② El ángulo de reflexión θ_r es igual al ángulo de incidencia θ_i para todas las longitudes de ondas y para cualquier par de materiales.

$$\theta_r = \theta_i \quad (\text{Ley de Reflexión})$$

③ La razón de los senos de los ángulos θ_a y θ_b , donde los dos ángulos están medidos a partir de la normal a la superficie, es igual al inverso de la razón de los dos índices de refracción

$$\frac{\sin \theta_a}{\sin \theta_b} = \frac{n_b}{n_a}$$

o

$$n_a \cdot \sin \theta_a = n_b \cdot \sin \theta_b$$

(Ley de Refracción)
Ley de Snell.

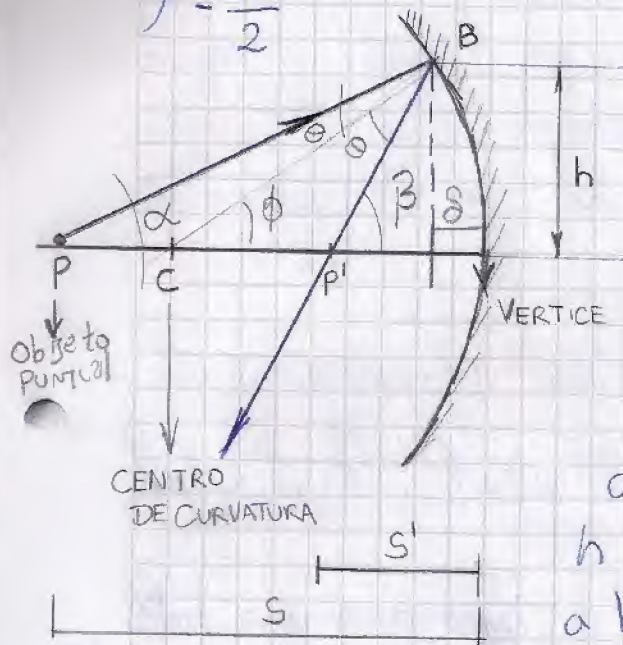
36 ECUACIÓN DE ESPEJOS

FECHA: 20

FECHA:

f : Distancia focal

$$f = \frac{R}{2}$$



Un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores opuestos aplicados a PBC y P'BC

$$\phi = \alpha + \theta$$

$$\beta = \phi + \theta$$

$$\alpha + \beta = 2\phi \quad (\text{Eliminamos } \theta)$$

Calculamos la distancia de imagen S' , siendo h la altura del punto B y S la distancia a V.

$$\tan \alpha = \frac{h}{S - S'}$$

$$\tan \beta = \frac{h}{S' - S}$$

$$\tan \phi = \frac{h}{R - S}$$

Al α , β y ϕ son ángulos pequeños; la tangente de un áng. mucho menor que un radián es casi igual al ángulo mismo se pueden simplificar las expresiones y podemos uz. S.

$$\alpha = \frac{h}{S}$$

$$\beta = \frac{h}{S'}$$

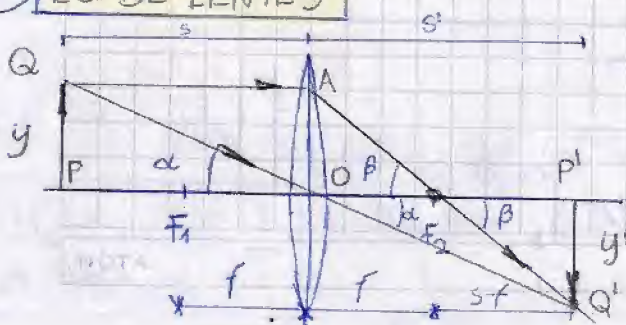
$$\phi = \frac{h}{R}$$

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{S'} = \frac{2}{R}$$

con f

$$\boxed{\frac{1}{S} + \frac{1}{S'} = \frac{1}{f}}$$

37 EC DE LENTES



Los α y β son iguales
PQO y P'Q'O son semejantes

$$\frac{y}{S} = -\frac{y'}{S'}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{S'}{S} \quad (+)$$

Lo mismo pasa con OAF_2 y $P'Q'F_2$

$$\frac{y}{f} = -\frac{y'}{s' - f}$$

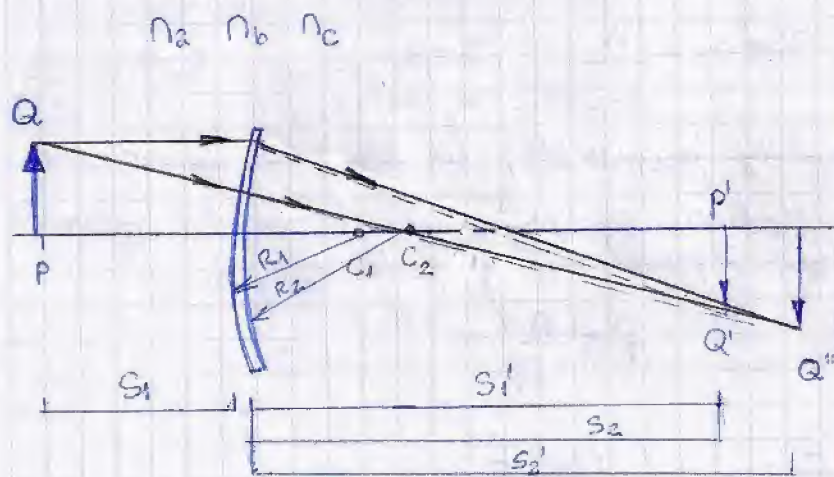
$$\frac{y'}{y} = -\frac{s' - f}{f}$$

⊕

igualando

$$\boxed{\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}}$$

Ec. de fabricantes de lentes (Relación entre f , n , y los radios de curvatura R_1 y R_2).



Suponemos una lente delgada, distancia entre superficies despreciable.

s_2 y s_1' son = (hacer op)

$$s_2 = -s_1'$$

Aplicamos $\frac{n_a}{s} + \frac{n_b}{s'} = \frac{n_a - n_b}{R}$

para cada superficie

$$\frac{n_a}{s_1} + \frac{n_b}{s_1'} = \frac{n_a - n_b}{R_1}$$

$$\text{y } \frac{n_b}{s_2} + \frac{n_c}{s_2'} = \frac{n_b - n_c}{R_2}$$

Como $n_a = n_c = 1$

n_b es la lente (n)

$$\frac{1}{s_1} + \frac{n}{s_1'} = \frac{n-1}{R_1}$$

$$\frac{n}{s_1'} + \frac{1}{s_2'} = \frac{1-n}{s_2}$$

Sumamos las ec. para obtener una relación

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2'} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow$$

Combinamos
 s_1 en lugar
 s_1' en lugar s_2'

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\boxed{\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}$$